Gravitação Universal

Até 1687 ⟹ Dados experimentais acerca dos movimentos da lua, planetas e estrelas.

⟹ Não havia um entendimento claro sobre as forças relacionadas com esses movimentos.

Isaac Newton: Isaac Newton aplicou suas leis aos corpos celestes.

Da 1ª lei ele concluiu que a lua estava sobre a ação de uma força, afinal, se não estivesse ela se moveria em linha reta com velocidade constante. Como o movimento lunar é ao redor da terra, Newton concluiu que tratava-se de uma força de atração entre a terra e a lua.
Considerou que o mesmo tipo de atração seria comum a todos os materiais; assim ele explicou também a interação entre sol e os demais planetas, bem como o motivo pelo qual uma maçã, por exemplo, cai em direção ao chão (assim como os demais objetos).

Newton chamou esta força de **Gravidade**

Lei de Newton da gravitação Universal.

Em 1687 Newton publicou seu trabalho *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*.

A lei de Newto da Gravitação Universal afirma que:

Cada partícula no universo atrai qualquer outra partícula com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

$$\Rightarrow \quad F_g \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\text{ou} \quad F_g = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2}$$

Se $[r] = \text{metro}$ e $[m] = \text{quilograma (kg)}$

$\longrightarrow$ dois "objetos" de 1kg separados de um metro se atraem com uma força de

$$\underline{F_g = 6{,}673 \times 10^{-11}\, N}$$

Sendo assim $\Rightarrow$ $\boxed{G = 6{,}673 \times 10^{-11}\, \frac{N.m^2}{kg^2}}$

Podemos expressar esta força vetorialmente como segue:

$$\vec{F}_{12} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{r}_{12}$$

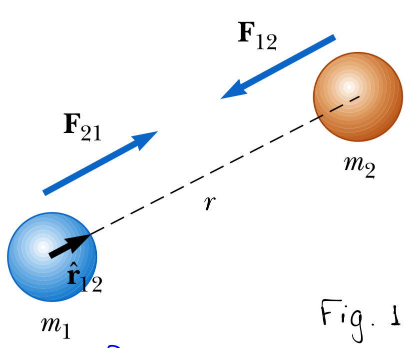


Fig. 1

" $\vec{F}_{12}$ ≡ Força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2.

$\hat{r}_1$ ≡ Vetor unitário no sentido de 1 para 2.

O sinal negativo indica que a partícula 2 é atraída no sentido da partícula 1 $(-\hat{r}_{12})$.

Pela 3ª lei de Newton:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

"Pergunta: Qual seria a origem desta força? Como a lua "sabe" que a terra está aqui?"

"Resposta: ? Não sei.

Uma característica interessante é que a força gravitacional exercida por um material esférico de raio R, sobre uma partícula externa não depende de seu raio; equivale a força exercida por um material de igual massa como se toda sua massa estivesse concentrada no seu ponto central (verificaremos este fato mais a frente).

Segue que a força com a qual a terra atrai uma partícula de massa m nas proximidades de sua superfície é

$$F_g \cong G\,\frac{M_T m}{R_T^2}\,;$$

onde $M_T \equiv$ massa da Terra e R_T é o seu raio. Esta força é direcionada para o centro da terra.

Como Newton concluiu a lei do inverso do quadrado?

Na literatura encontra-se diferentes formas que podem ser utilizadas para verificar-se a relação do inverso do quadrado. Abaixo citamos algumas:

* Considerando que exista uma força de atração entre os corpos, é possível mostrar-se matematicamente que uma órbita estável não circular (como são os casos lua/terra, Sol/pla, etc) só pode ser estável para uma força de atração que caia com o quadrado da distância.

⟹ Mas a natureza não é obrigada a respeitar as leis assumidas pelo homem ou suas teorias. A certeza vem através de medidas experimentais ⟹ Como? ⟹

"Precisamos" de medir as forças em diferentes distâncias ao centro da terra e então compará-las a fim de verificarmos como sua intensidade varia.

Devemos medir uma força, digamos, próximo à superfície da terra (tarefa simples) e uma outra em um ponto distante o suficiente para que a força mude significativamente. Esta última tarefa é complexa, sobretudo no século XVII, pois o segundo experimento deve ocorrer no espaço. Efetivamente, Newton comparou a diferença entre a aceleração de um objeto (maçã?) próximo à superfície da terra e a aceleração da lua.

Como medir a aceleração da lua?

Vamos usar (tentar) relações simples da mecânica. Supondo uma órbita circular para a lua:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{"aceleração centrípeta".} \qquad (1)$$

mas $v = wr$ sendo $w = 2\pi f$ e $f = \frac{1}{T}$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad (2)$$

f = frequencia

e T = período.

(2) em (1)

$$a = \frac{4\pi^2 r^2}{T r}$$

$a = \frac{4\pi^2 r}{T}$, onde $\underline{r}$ é a distância da lua ao centro de rotação (~ centro da terra.)

Sendo assim, a aceleração da lua pode ser obtida se soubermos sua distância ao centro da terra (r) e o período (T) que leva para dar uma volta em torno da terra.

Obter T é uma tarefa simples, mas como saber $\underline{r}$?

De fato a obtenção de $\underline{r}$ deve ser feita, obviamente, através de algum meio indireto.

Abaixo desenvolvemos um método geometrico engenhoso realizado já pelos gregos antigos capaz de fornecer tanto a distância terra/lua quanto o tamanho da lua (seu diâmetro).

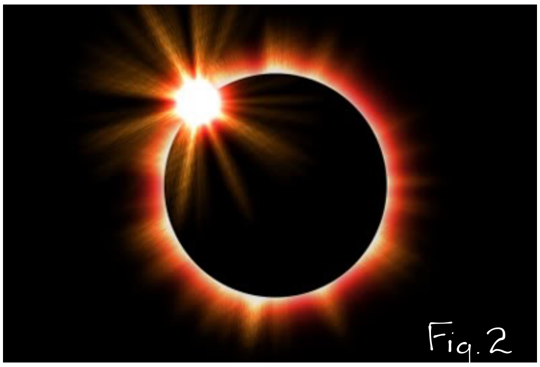


Fig. 2

Um fato utilizado no método é uma grata coincidência; do ponto de vista da terra a lua e o sol têm o "mesmo tamanho", ou melhor definem a mesma abertura angular.

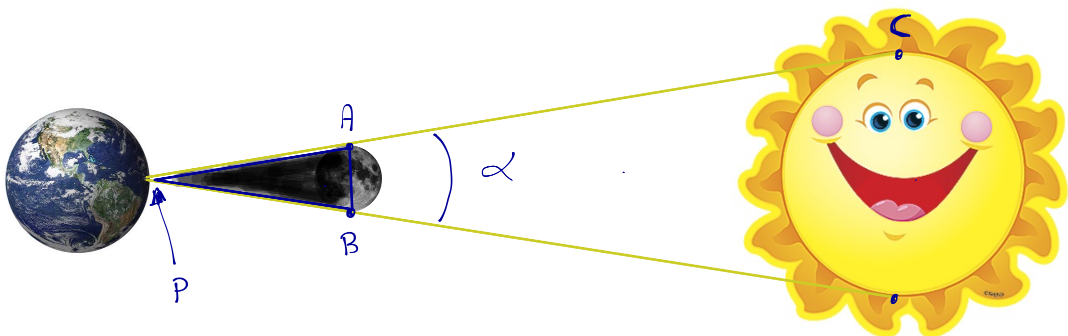


Fig. 3

Adicionalmente observa-se que todas as sombras de objetos esféricos, de qualquer tamanho, convergem para um ponto que está a uma distância de aproximadamente <u>108</u> vezes o seu diâmetro. Isto significa que todos os "triângulos" resultantes das sombras de objetos esféricos são semelhantes.

Exemplo:

Do caso acima $\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{AB}}{h} \cong \dfrac{\overline{CD}}{H}$, etc.

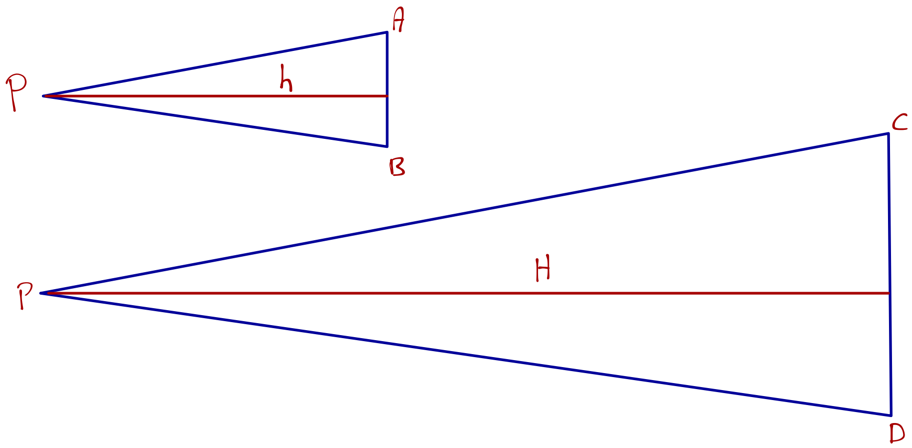


Fig. 4

Pode-se obter a razão entre a distância do sol e a da lua como segue:

Da terra, observa-se a lua quando esta estiver exatamente metade visível (iluminada), como ilustrado abaixo.

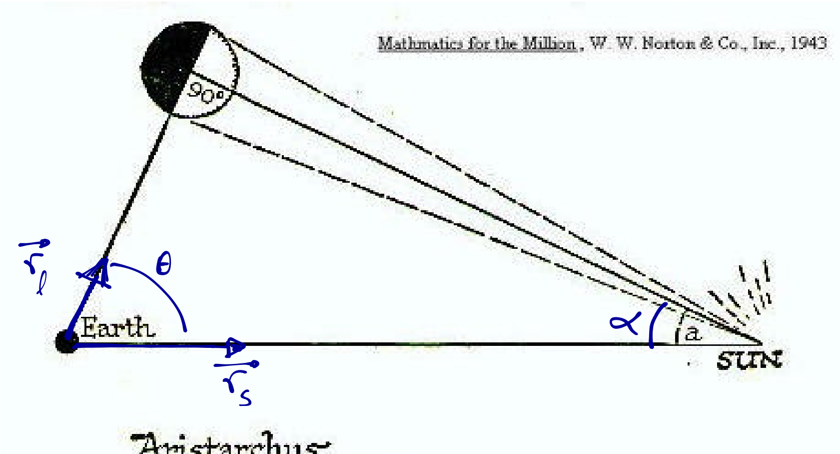


Fig. 5

Através de observações nas direções $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ define-se os ângulos θ e α. Neste caso, o ângulo observado para <u>θ</u> é:

$$\theta \simeq 89{,}85^\circ$$

Portanto $$\cos(89{,}85^\circ) = \frac{r_l}{r_s}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{r_s}{r_l} \simeq 382.}$$

Significa que o sol está $\approx$ 400 vezes mais longe que a lua.

Pela semelhança dos triângulos acima pode-se concluir que o sol é $\simeq$ 400 maior que a lua também.

☆ Mas qual seria o tamanho da lua e sua distância da terra?

<u>Tamanho:</u>

Observando a sombra da terra sobre a lua,

Fig. 6

;

e considerando que o sol está tão distante que os raios passam praticamente paralelos:

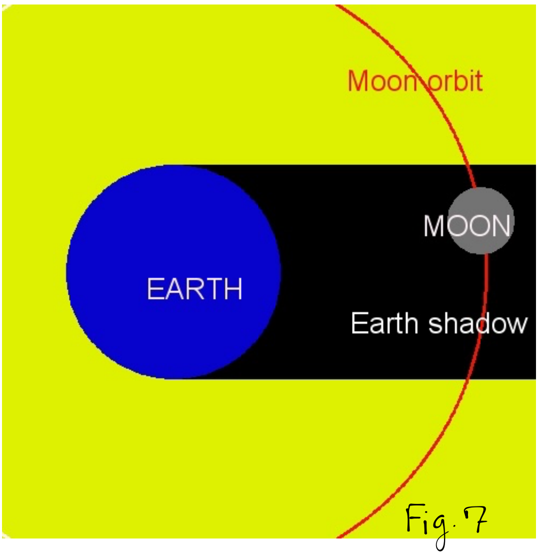


Fig. 7

⇒ com o auxílio de um compasso pode-se determinar o quanto a terra é maior que a lua.

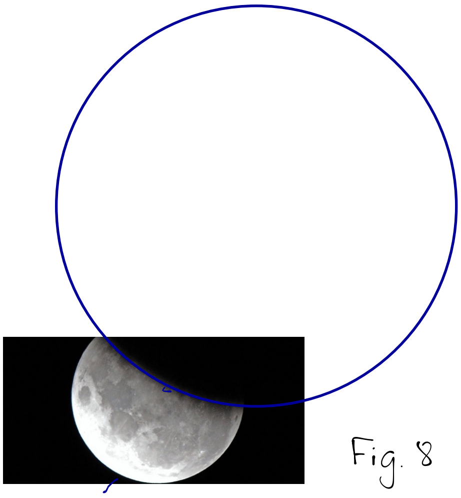


Fig. 8

Encomtra-se que o diâmetro da terra D_T é de aproximadamemte 3,5 vezes maior que o diâmetro da lua.

Mas o diâmetro da terra mós sabemos.

$$\boxed{D_\ell \simeq \frac{D_T}{3{,}5}}$$

Sem $D_T \simeq 12756$ km.

$$\Rightarrow \boxed{D_\ell \simeq 3600 \text{ km}}$$

Obs: Vimos que $D_{sol} \simeq 400 \times D_\ell$

Concluímos emtão que $\boxed{D_{sol} \simeq 1457000 \text{ km}}$

Distâmcia terra lua:

Vimos acima (Fig. 3), que o come da sombra da lua durante o eclipse tem vértice (sua ponta) "tocando" a superfície da terra. Adicionalmemte, sabe-se que o come de sombra de qualquer corpo esfé- rico, a essa distância do sol (terra, lua, objetos sobre a terra; todos estão aproximadamemte a uma mesma distância do so e, por portanto produzem mesmo tamanho de projeção de suas sombras) se extende por uma distância ≈ 108 vezes maior que o diâmetro do corpo.

Sendo assim:

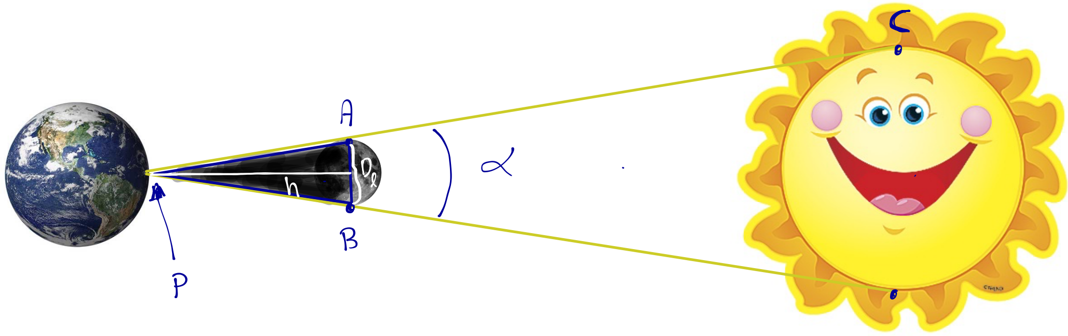


Fig. 3

$h \simeq 108 D_\ell$

Como D_ℓ é conhecido ; $D_\ell \simeq 3600$ km

$\Rightarrow h \simeq 108 \times 3600$ km

$h \cong 390000$ km

Esta seria, aproximadamente, a distância da superfície da terra ao centro da lua:

Então a distância do centro da terra ao centro da lua (r_ℓ) é

$r_\ell \approx (390000 + \text{raio da terra})$ km

$r_\ell \approx (390000 + 6300)$ km

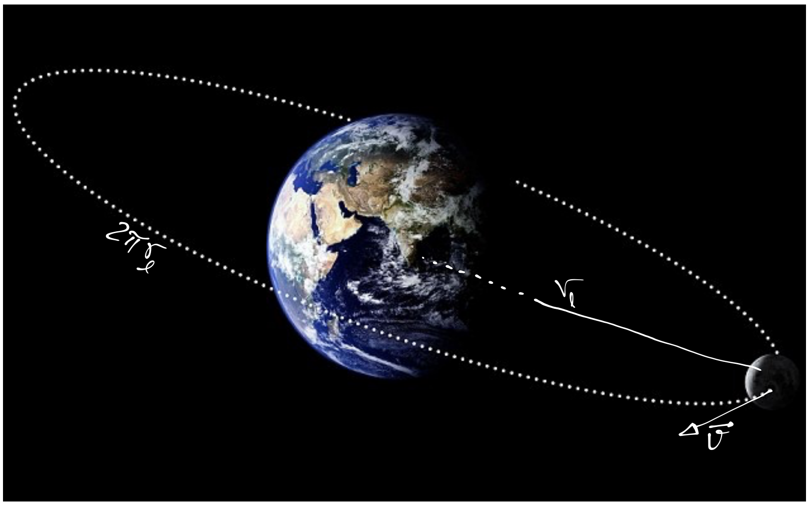
$\boxed{r_\ell \approx (396000) \text{ km}}$, aproximadamente.

Obs: Os valores acima foram obtidos "a moda antiga", ou seja, são valores grosseiros. Contudo estão próximos aos obtidos através de medidas experimentais mais precisas.

Aceleração da lua

Considerando um órbita circular de raio r_ℓ; a gravidade impõe uma aceleração centrípeta à lua;

$$a_\ell = \frac{v^2}{r_\ell}$$



$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$v = \frac{2\pi r_\ell}{T}$$ ← Perímetro da órbita ← período de rotação

$$\Longrightarrow a_\ell = \frac{4\pi^2 \cancel{r_\ell^{2}}}{\cancel{r_\ell}\, T^2}$$

$$a_\ell = \frac{4\pi^2 r_\ell}{T^2}$$

O periodo de órbita é facilmente obtido por observação direta.

Sabe-se que $T \approx 27{,}3$ dias

ou $T \simeq 27{,}3 \times 24 \times 60 \times 60$ segundos

Portanto; usando $r_\ell \simeq 390000000$ metros

$$a_\ell \simeq \frac{4\pi^2 \cdot 390000000}{2358720^2}\ m/s^2 \qquad a_\ell \simeq 0{,}0027\ m/s^2$$

Na superfícia temos $g \simeq 10 m/s^2$

$g(r_T) \simeq 10 m/s^2$ e $g_l(r_l) \simeq 0{,}0027 m/s^2$

$g_l \simeq 0{,}00027\, g$

Será que g cai com o quadrado da distância?

Vamos supor $g = \frac{cte}{r^2}$ "que cai com o quadrado"

$g_1 = \frac{cte}{r_1^2}$ e $g_2 = \frac{cte}{r_2^2}$

$\frac{g_2}{g_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$ façamos $g_2 = g_{lua}$ e $g_1 = g_{terra}$

$\Longrightarrow r_1 = r_T$ e $r_2 = r_l$

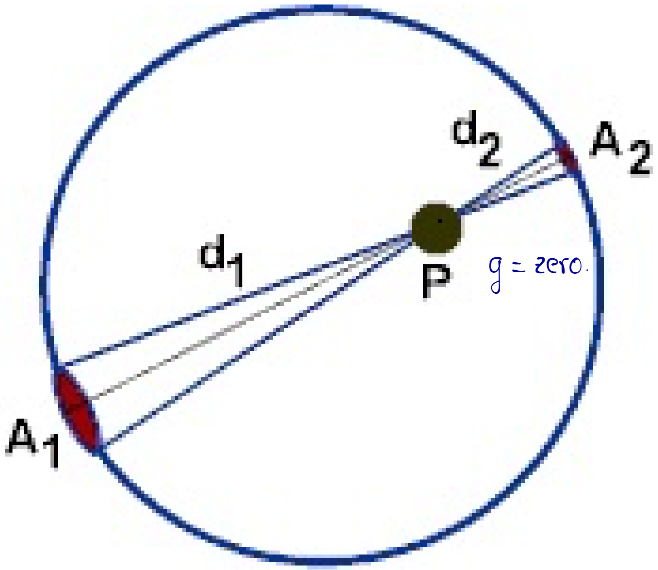
$$\frac{0{,}0027}{10} = \frac{6500^2}{390000^2}$$

$$2{,}7 \times 10^{-4} = 2{,}77 \times 10^{-4}$$

Provando que a força gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Gravitação no Interior da Terra:

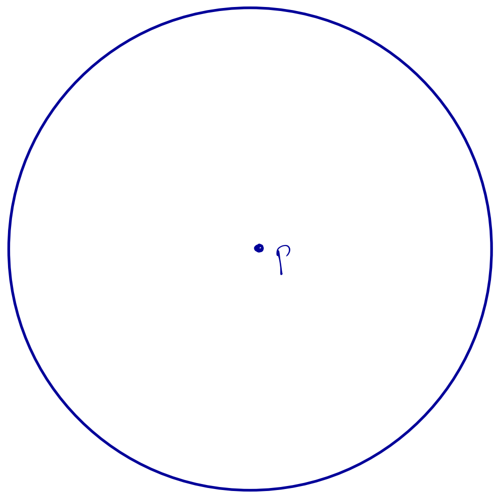
Teorema da casca:



O teorema diz que dentro de uma casca esférica oca a gravidade é nula.

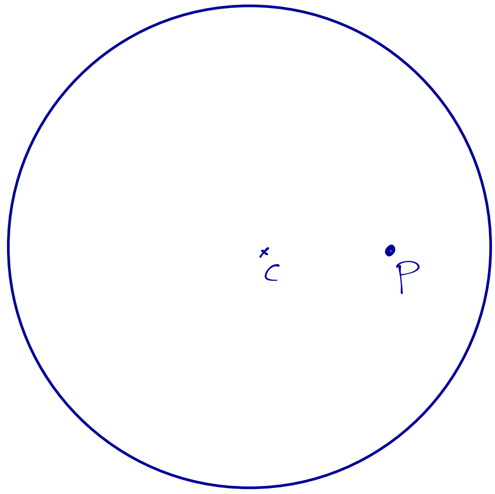
Este teorema pode ser justificado de forma simples:

Consideremos um ponto bem no centro de uma esfera oca.

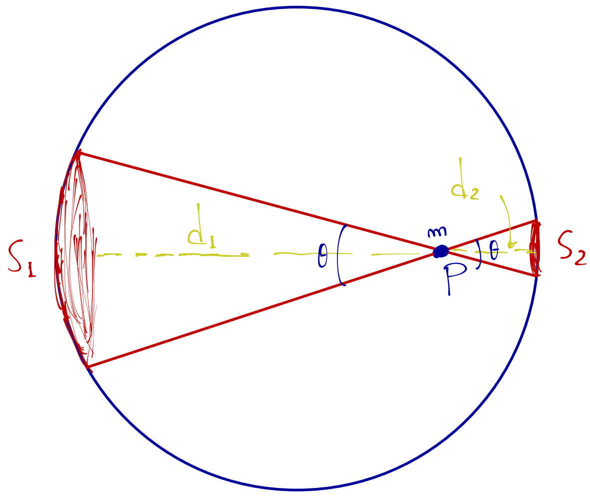


⇒ Obviamente a força sobre um corpo em P é nula, pois é atraído igualmente para todos os lados.

Vamos então deslocar o ponto P (imagine um objeto pontual) para algum lado, digamos no sentido esquerda ⟶ direito como ilustrado abaixo.



Vamos então analisar o efeito dos elementos de casca opostos S_1 e S_2 ⇓



Força devida a S_1 será F_1 e devida a S_2 será F_2.

Também consideremos Massa de $S_1 = M_1$ e Massa de $S_2 = M_2$.

$$F_1 = \frac{G m M_1}{d_1^2} \quad e \quad F_2 = \frac{G m M_2}{d_2^2}$$

$$M_1 = \sigma.(\text{Área de } S_1) \quad e \quad M_2 = \sigma.(\text{Área de } S_2)$$

$$A_1 \simeq \pi r_1^2 \quad e \quad A_2 = \pi r_2^2$$

Mas $r_1 = d_1 . \theta$ e $r_2 = d_2 . \theta$

$$A_1 = \pi \theta^2 d_1^2 \quad e \quad A_2 = \pi \theta^2 d_2^2$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \sigma \pi \theta^2 d_1^2 \quad e \quad A_2 = \sigma \pi \theta^2 d_2^2$$

Portanto:

$$F_1 = \frac{Gm\,\sigma \pi \theta^2 \cancel{d_1^2}}{\cancel{d_1^2}} \quad e \quad F_2 = \frac{Gm\,\sigma \pi \theta^2 \cancel{d_2^2}}{\cancel{d_2^2}}$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = F_2 \quad \text{em módulo.}$$

Vetorialmente:

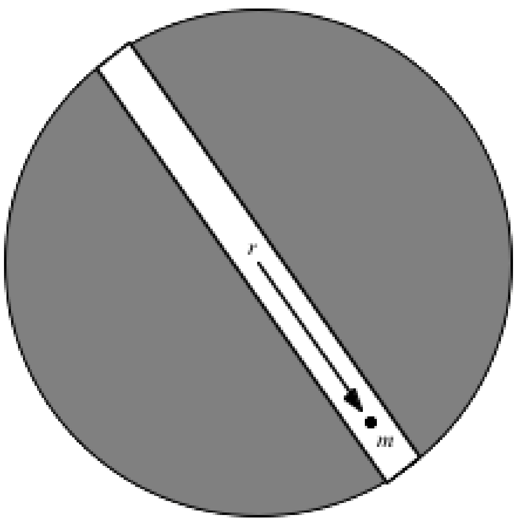
$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$

$$\boxed{\text{Logo} \quad \vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{\text{zero}}}$$

Este resultado serve para qualquer par de elementos da superfície contrários. Logo a força sobre $\underline{m}$ é zero.

Exercício:

O que acontece se deixarmos um objeto cair através de um buraco que atravesse a terra, como ilustrado abaixo?



$\Rightarrow$ A força, em cada ponto será devida à porção de tera abaixo de $\underline{r}$. A massa abaixo de $\underline{r}$ é:

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 . \rho$$

$$F = \frac{G\,m\,M}{r^2}$$

$$F = \frac{G\,4\pi\rho\,\cancel{r^3}}{3\,\cancel{r^2}}$$

$$F = \frac{G\,4\pi\rho}{3}r .$$

$\Rightarrow$ A força diminui com $\underline{r}$, sendo nula em $r=0$.

Passando pelo ponto central o sentido da força inverte. Vetorialmente, assumindo $r>0$ para um lado.

$\Rightarrow$ $\vec{F} = -K\vec{r}$

Movimento oscilatório (similar a uma mola).